Analyse (04/05)
Tentamen, Maandag 27 juni, 2005
duur: 3 uur.

Lees elk opgave eerst in zijn geheel door. Vermeld de gebruikte stellingen kort en bondig. Geef duidelijk aan wat je aangaat tonen. Een antwoord zonder toelichting, ook al is het antwoord goed, levert geen punten op.

1.[1] Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,y) = x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

2

(i)[3] Toon aan dat f continu is op $\mathbb{R}^2$. (Gebruik voor de continuiteit in $(0,0)$ een afschatting en een (ε, δ) argument.)
(ii)[3] Toon aan dat de richtingsafgeleide $D_u f(0,0)$ bestaat en bereken deze. Laat zien dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

(iii)[3] Geef de definitie van differentieerbaarheid en toon hiermee aan dat de functie f *niet* differentieerbaar is in $(0,0)$.

2.[1] (i)[2] Formuleer de globale inverse functie stelling.
(ii)[5] Beschouw de afbeelding $F : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met

$$O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x|\}, \quad F(x,y) = (xy, x^2 + y^2) = (u,v).$$

(1) Schets O en leg uit waarom O open is (eventueel met behulp van je schets).
(2) Toon aan dat F een C^∞-diffeomorfie op O is.
(3) Toon aan dat $F(O) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 2|u|\}$.
8 (Aanwijzing: Bewijs en gebruik dat $v^2 - 4u^2 = (y^2 - x^2)^2$.)
(iii)[2] Bepaal de afgeleide van $F^{-1}(u,v)$ in het punt $(u,v) = F(x,y)$.

3.[1] (i)[2] Formuleer de impliciete functie stelling.
(ii)[3] Toon aan dat er C^1-functies φ, $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zijn zó dat voor alle $(x,y) \in U$:

$$x\varphi(x,y)^2 + 2y\psi(x,y) = 9, \quad y^2\varphi(x,y) + x\psi(x,y) = 6,$$

waarbij U een open deelverzameling is met $(1,2) \in U$ en $\varphi(1,2) = 1$, $\psi(1,2) = 2$.
(iii)[4] Bereken vervolgens $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(1,2)$ en $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(1,2)$.

Z.O.Z.

4.[1] Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y) = 3x^2 + xy^2 - 9x$ en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$.
(i)[2] Formuleer de stellingen die je gebruikt bij de volgende onderdelen. Garanderen deze stellingen het bestaan van extreme waarden?
(ii)[3] Bepaal de extremen van f op $\mathbb{R}^2$ en hun aard.
(iii)[4] Bepaal de extremen van f op A en hun aard.

5.[1,9] Formuleer en bewijs de contractiestelling (ook wel dekpuntstelling genoemd) op een gesloten deelverzameling B van $\mathbb{R}^m$.